EXERCICES

I - EXERCICES SUR LES LOIS DE PROBABILITÉ

Lois discrètes (1 → 5)

Exercice 1

On lance un dé à 6 faces et on note X le nombre de points amenés.

1) Donner le loi de X (2 méthodes sont possibles).
2) Rappeler les définitions de E(X), V(X), σ(X) et donner leur valeur.
3) Donner une représentation graphique de la fonction de répartition F de la variable X.

Exercice 2

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi définie dans le tableau ci dessous :

valeurs de X	1	2	3
probabilités	0,2	0,5	0,3

On pose $A = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ $B = \max(X_1, X_2)$ et $C = 2X_1 - 1$

1) Rappeler la définition de l'indépendance entre les variables X_1 et X_2.
   Calculer l'espérance et la variance des variables A et C.
2) Déterminer les lois des variables A, B, C. Calculer l'espérance et la variance de B.

Exercice 3

Soit X une v.a. de loi discrète $(x_i, p_i)_{1\le i\le n}$ en utilisant l'expression explicite de V(X) montrer que $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$

Exercice 4

Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble d'entiers {0, 1, .., 9}. On définit deux variables Y et M par :

$Y = 10*X_1 + X_2$ et $M = \min(X_1, X_2)$.

1) Donner les valeurs de E(Y) et V(Y) et montrer que $E(M) \le \min\{E(X_i) ; i=1,2\}$.
2) Déterminer les lois de probabilité des variables Y et M. Donner une représentation graphique de la loi de M et calculer les valeurs de E(M) et V(M).

Exercice 5

Une enquête récente a montré que 20% des adolescents âgés de 14/15 ans et scolarisés en classe de 3ème présentent un surpoids.

1) Cinq jeunes âgés de 14/15 ans et scolarisés en classe de 3ème sont réunis chez l'un d'eux pour passer l'après-midi plongés dans des jeux sur ordinateur, calculer la probabilité que l'un au moins présente un surpoids.
2) On note X le nombre d'élèves présentant un surpoids dans une classe de 3ème comptant 30 élèves âgés de 14/15 ans. Donner en la justifiant la loi de X et préciser les valeurs de E(X) et V(X).

Scanné avec CamScanner

3) Calculer la probabilité qu'au moins 5 d'entre eux présentent un surpoids. Donner une interprétation de l'événement $(|X-E(X)| \leq 2)$ et calculer sa probabilité.

Exercice 6

On considère une variable U de loi uniforme sur l'intervalle [0,1]. On notera f sa fonction de densité.

1) Indiquer les propriétés caractéristiques de f, donner son expression analytique et tracer son graphe.
2) Calculer la fonction de répartition correspondante notée F. En déduire les probabilités suivantes : $P(U< 0,25)$, $P(0,2<U<0,8)$, $P(U\geq 0,6)$.
3) Calculer E(U), V(U) et σ(U).

Exercice 7

On considère une variable X de loi uniforme sur l'intervalle [a,1], avec a<1. On notera g sa fonction de densité et G sa fonction de répartition.

1) Donner l'expression analytique des fonctions g et G. Calculer E(X), V(X) et σ(X).
2) Ecrire une relation entre les variables U et X, où U est la variable étudiée à l'exercice précédent. En déduire une relation entre F et G et entre f et g, où F et f ont été définies à l'exercice 6.
3) Dans le cas particulier où a = - 1, calculer la loi de $Y = |X|$ ainsi que E(Y) et V(Y).

Exercice 8

Soit U une variable de loi uniforme sur l'intervalle]0,1]. On définit les v.a. X, Y, Z par

$$X = \sqrt{U} \qquad Y = \frac{1}{2U+1} \qquad Z = -\ln U.$$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par chacune des variables X, Y, Z.
2) Déterminer la fonction de répartition et la densité de chacune de ces variables, puis tracer leur graphe.
3) Pour chacune des variables X, Y, Z, calculer l'espérance mathématique et la variance si toutefois les intégrales sont définies .

Exercice 9

On suppose que la durée de vie d'une lampe est une v.a. $X > 0$ dont la densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\exp(-\frac{1}{a}x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{(avec } a > 0\text{)}.$$

1) Calculer la fonction de répartition F, l'espérance et la variance de X.
2) Sachant que la durée de vie moyenne d'une lampe est de 2500 heures donner la valeur de a. Calculer la probabilité qu'une lampe de ce type dure entre 2500 et 3500 heures.

Scanné avec CamScanner

Exercices.

Exercice 1 :

- 1 - $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$

Loi uniforme $\{1,2,3,4,5,6\}$

$P(X=k) = \frac{1}{6}$, $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$

ou

$F(k) = P(X \leq k) = \frac{k}{6}$; $k \in \{1,\dots,6\}$

- 2 - $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{7}{2} = 3,5$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - (E(X))^2 = \frac{35}{12} = 2,91$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1,7$

- 3 - F est une fct en escalier

$F(x) = 0$ si $x < 1$

$F(x) = 1$ si $x > 6$

$F(x) = \frac{[x]+1}{6}$ où $[\,]$: est la partie entière de x

Exercice 2 :

1°/ X_1 et X_2 sont des v.a indépendante ssi toute événement liée à l'une est différente à l'autre événement.

$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = P(X_1 = i)\, P(X_2 = j)$

2°/ • $A = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$

$E(A) = \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_2))$

$E(X_1) = E(X_2) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i$

$\Rightarrow E(A) = 2,1$

• $C = 2X_1 - 1$

$E(A) = 2E(X_1) - 1 = 3,1$ (X_1 et X_2 indépendant)

• $V(A) = V\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right) = \frac{1}{4}\left[V(X_1) + V(X_2)\right]$

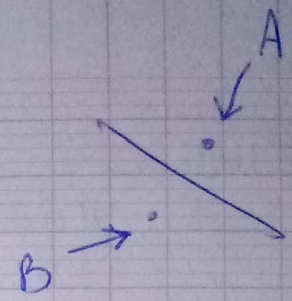
$V(X_1) = V(X_2) = 0,49 \Rightarrow V(A) = \frac{1}{4} \times 0,98 = 0,24$

• $V(C) = V(2X_1 - 1) = 4\,V(X_1) = 4 \times 0,49 = 1,96$

Scanné avec CamScanner

2)

X_2 \ X_1	1	2	3
1	1 (1+1)	1,5 (1+2)	2 (1+3)
2	1,5 (2+1)	2 (2+2)	2,5 (2+3)
3	2 (3+1)	2,5 (3+2)	3 (3+3)



Loi de couple (X_1, X_2) :

X_2 \ X_1	1	2	3	$P_{X_2}(\ )$
1	0,04	0,1	0,06	0,2
2	0,1	0,25	0,15	0,5
3	0,06	0,15	0,09	0,3
$P_{X_1}(\ )$	0,2	0,5	0,3	1

$P(X_1=1) P(X_2=1)$

$P(X_1=1 \cap B(X_2=1)) = P(X_1=1) \cdot P(X_2=1)$

La loi de A :

valeurs de A	1	1,5	2	2,5	3	Total
Probabilité	0,04	0,2	0,37	0,3	0,09	1

valeurs de B	1	2	3	Total
Probabilité	0,36	0,55	0,09	1

Scanné avec CamScanner

La Loi de C : $C = 2X_1 - 1$

valeurs de C	1	3	5	Total
Probabilité	0,2	0,5	0,3	0,1

$E(B) = 0,36 + 2 \times 0,55 + 3 \times 0,09 = 1,73$

$V(B) = 0,36 + 4 \times 0,55 + 9 \times 0,09 - (1,73)^2 = 0,377$

Exercice 3 :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - [E(X)]^2 + [E(X)]^2 \right) p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - (E(X))^2 \right) p_i + \sum_{i=1}^{n} (E(X))^2 p_i$$

$$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$$

Exercice 4 :

1). $X = 10 X_1 + X_2$, $M = \min(X_1, X_2)$

$E(X) = 10 E(X_1) + E(X_2)$

$E(X_1) = E(X_2) = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + \dots + 9 \times \frac{1}{10} = 4,5$

$E(Y) = 49,5$

$V(X_1) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 p_i - (E(X_1))^2 = \left(\frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{81}{10} \right) - (4,5)^2 = 8,25$

$V(Y) = V(10 X_1 + X_2) = 100 V(X_1) + V(X_2)$

$= 101 V(X) = 833,25$

$V(X_1) = 8,25$

?

- $E(M) \leq \min \{ E(X_i) ; i = 1,2 \}$

$M = \min(X_1, X_2) \Rightarrow M \leq X_i \ (i = 1,2)$

$E(M) \leq E(X_i) \ (i = 1,2) \Rightarrow E(M) \leq \min E(X_i) \ i \in (1,2)$

Scanné avec CamScanner

2) Loi de Y : $Y = 10 X_1 + X_2$

• Y suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, 99\}$

Loi de M : $M = \min(X_1, X_2)$

Les valeurs de M sont $\{0, 1, \dots 9\}$

$P(M > k) = 1 - P(M \leq k)$

$P(M > k) = P(\min(X_1, X_2) > k) = P(X_1 > k \cap X_2 > k)$

$= P(X_1 > k)\, P(X_2 > k) = (P(X_1 > k))^2$

$P(X_1 > k) = 1 - P(X_1 \leq k) = 1 - F(k) = 1 - \frac{k+1}{10}$ pour la loi unif

$P(M > k) = \left(1 - \frac{k+1}{10}\right)^2$

$P(M = k) = P(M > k-1) - P(M > k)$

$= \left(1 - \frac{k}{10}\right)^2 - \left(1 - \frac{k+1}{10}\right)^2$

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$= \left(1 - \frac{k}{10} - \left(1 - \frac{k+1}{10}\right)\right)\left(1 - \frac{k}{10} + \left(1 - \frac{k+1}{10}\right)\right)$

$= \frac{1}{10}\left(2 - 2\frac{k}{10} - \frac{1}{10}\right) = \frac{19}{100} - \frac{2k}{100}$

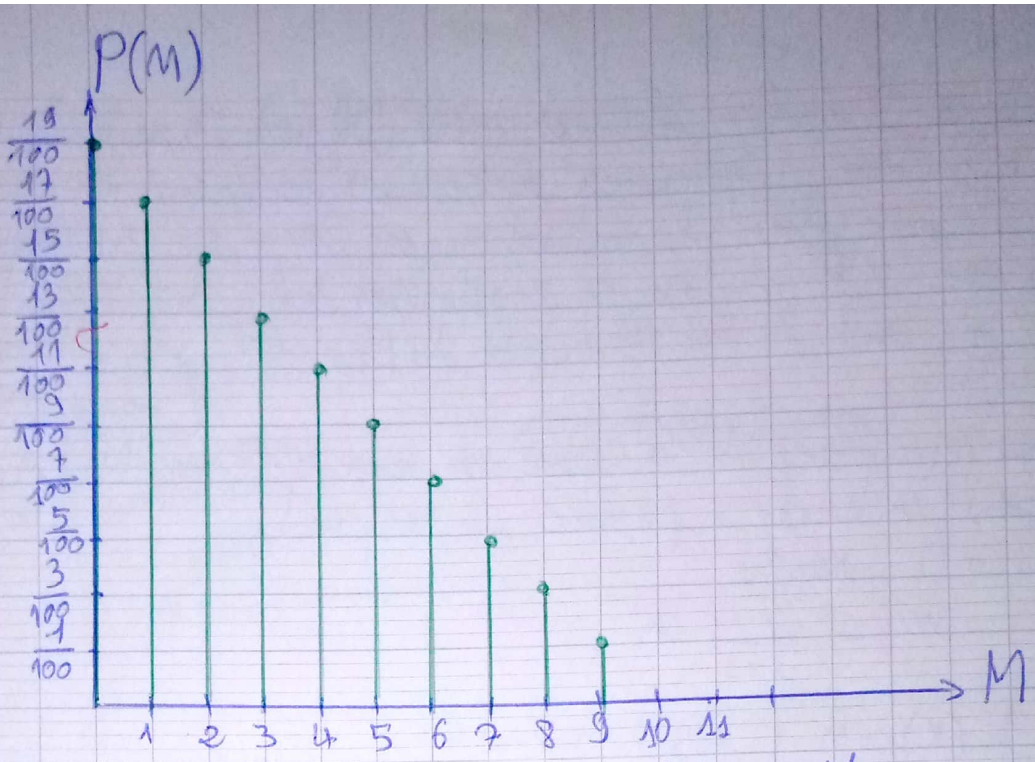
$P(M=0) = \frac{19}{100}$ | $P(M=3) = \frac{13}{100}$ | $P(M=6) = \frac{7}{100}$

$P(M=1) = \frac{17}{100}$ | $P(M=4) = \frac{11}{100}$ | $P(M=7) = \frac{5}{100}$

$P(M=2) = \frac{15}{100}$ | $P(M=5) = \frac{9}{100}$ | $P(M=8) = \frac{3}{100}$

$P(M=9) = \frac{1}{100}$

Scanné avec CamScanner



représentation graphique de la loi de M

$$E(M) = \sum M_i P_i = \frac{17 + 2\times15 + 3\times13 + 4\times11 + 5\times9 + 6\times7}{100}$$

$$= \frac{7\times5 + 8\times3 + 9}{100} = 2,85$$

$$V(M) = E(M^2) - (E(M))^2$$

Exercice 5 :

1- soit A_i : "l'evenement d'invidu n°= i presente un surpoid"
$\overline{A_i}$: "l'evenement (d'individu n°= i complementaire".

$P(A_i) = 0,2$ | Soient $E_i = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$
$P(\overline{A_i}) = 0,8$ | $\overline{E_i} = \bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i}$

$$P(\overline{E_i}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{5} P(\overline{A_i}) = (0,8)^5 = 0,327$$

$$P(E_i) = 1 - 0,327 = 0,673$$

Scanné avec CamScanner

2- X : le nombre d'élèves (parmi 30) présentant un surpoids
on effectue n épreuves successives indépendantes où on observe à chaque fois la réalisation ou non d'un certaines événement A et note X le nombre de réalisation de A. on définit ainsi une V.a X qui suit la loi Binomiale de Paramètre $\begin{cases} n = 30 \\ p = 0,8 \end{cases}$

Au ième élève de la classe on associe la variable Z_i définie par
$Z_i = 1$ si l'individu i présente un surpoid
$Z_i = 0$ sinon

$$X = \sum_{i=1}^{30} Z_i$$

$E(X) = n.p = 30 \times 0,2 = 6$
$V(X) = npq = 30 \times 0,2 \times 0,8 = 4,8$

3) $F(4) = 0,2552$
$F(8) = 0,8713$
$F(3) = 0,1227$
} Données

* $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$
$= 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,2552$
$= 0,7448$

* $|X - E(X)| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq X - E(X) \leq 2$

$-2 + E(X) \leq X \leq 2 + E(X) \Leftrightarrow 4 \leq X \leq 8$

$P(|X - E(X)| \leq 2) = P(4 \leq X \leq 8)$

$= P(3 < X \leq 8) = F(8) - F(3) = 0,7486$

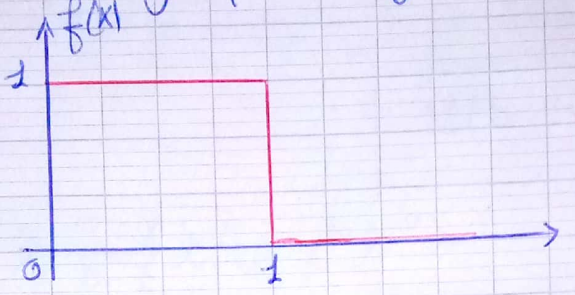
Scanné avec CamScanner

Exercice 6:

-1- Les propriétés caractéristique de f :

- $f \geq 0$
- f continue P.P
- $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$

L'expression analytique de f : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



-2- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 1\,dt \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- $P(U < 0,25) = F(0,25) = 0,25$
- $P(0,2 < U < 0,8) = F(0,8) - F(0,2)$
  $= 0,8 - 0,2 = 0,6$
- $P(U \geq 0,6) = 1 - P(U < 0,6)$
  $= 1 - F(0,6) = 1 - 0,6 = 0,4$

-3- $E(U) = \frac{1}{2} = 0,5$; $V(U) = \frac{1}{12}$; $\sigma(U) = \sqrt{V(U)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Exercice 7:

X : loi uniforme sur $[a,1]$

-1- $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } x \in [a,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc (G : fct de répartition de X)

pour $x \in [a,1]$, on a $G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{1-a}\,dt$

$\Rightarrow G(x) = \frac{x-a}{1-a}$

Scanné avec CamScanner

Donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{1-a} & \text{si } x \in [a,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{1+a}$; $V(X) = \frac{(1-a)^2}{12}$; $\sigma(X) = \frac{(1-a)}{\sqrt{12}}$

- exp: $\underset{a}{[} \longrightarrow \underset{b}{]}$ pour $t \in [0,1]$; $X(\Omega) = a + (b-a)t$

* $X(\Omega) = a + (1-a)\Omega$

* Si $x \in [a,1]$ $\quad a < x < 1 \quad 0 < \frac{x-a}{1-a} < 1$

$\Rightarrow F\left(\frac{x-a}{1-a}\right) = \frac{x-a}{1-a} = G(x)$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

* si $x < a$: $\quad \frac{x-a}{1-a} < 0 \Rightarrow F\left(\frac{x-a}{1-a}\right) = 0 = G(x)$

* si $x > 1$ $\quad \frac{x-a}{1-a} > 1 \Rightarrow F\left(\frac{x-a}{1-a}\right) = 1 = G(x)$

CL : $G(x) = F\left(\frac{x-a}{1-a}\right)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } x \in [a,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $g(x) = G'(x) = F\left(\left(\frac{x-a}{1-a}\right)\right)' = \frac{1}{1-a} f\left(\frac{x-a}{1-a}\right)$

-3- pour $a = -1$;

$Y = |X|$; $\Rightarrow Y$ est à valeurs sur $[0,1]$

Scanné avec CamScanner

* Pour $y \in [0,1]$

$$P(Y<y) = P(|X|<y) = P(-y<x<y)$$

$$= G(+y) - G(-y) = \frac{y+1}{2} - \frac{-y+1}{2} = y$$

$\Rightarrow Y = |X|$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$

$$E(X) = \frac{1}{2} \; ; \; V(X) = \frac{1}{12}$$

Exercice 8 :

- 1 - . $X = \sqrt{U} \Rightarrow X$ est à valeur sur $[0,1]$

. $Y = \frac{1}{2U+1} \Rightarrow Y$ est à valeur sur $[\frac{1}{3}, 1]$

. $Z = -\ln U \Rightarrow Z$ est à valeur sur $[0, +\infty[$

- 2 - * F la fonction de répartition de X ; pour $x \in [0,1]$ on a : $F(x) = P(X<x) = P(\sqrt{U}<x) = P(U<x^2) = x^2$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1 \end{cases}$$

donc $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

* Soit G la fct de répartition de Y ; pour $y \in [\frac{1}{3}, 1]$ on a $G(y) = P(Y<y) = P(\frac{1}{2U+1} < y) = P(2U > \frac{1}{y} - 1)$

$$= P\left(U > \frac{1-y}{2y}\right) = 1 - \frac{1-y}{2y}$$

Scanné avec CamScanner

$$G(y) = \frac{3y-1}{2y} \Rightarrow G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \frac{1}{3} \\ \frac{3y-1}{2y} & \text{si } y \in \left[\frac{1}{3}, 1\right\} \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ \frac{1}{2y^2} & \text{si } y \in \left[\frac{1}{3}, 1\right\} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

3) Calculer la probabilité qu'une lampe de ce type dure plus de 3500 heures sachant qu'elle a duré plus de 2500 heures.

Exercice 10

Soit T une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1) En utilisant la table, déterminer : $P(0 < T < 1,5)$ $P(T < -0,5)$ $P(|T| > 2,5)$.

2) Déterminer a, b et c tels que : $P(T < a) = 0,95$ $P(|T| < b) = 0,60$ $P(T < c) = 0,25$.

3) Donner l'expression de la densité f_0 de T. Quelle est le maximum de f_0 ?

Exercice 11

Soit X une v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(2,5 ; 5)$.

Calculer : $P(0 \leq X < 7,5)$ $P(|X-2,5| > 7,5)$.

Exercice 12

Soit X une v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$.

1) Déterminer m et σ sachant que : $P(X > 2) = 0,6$ et $P(X \leq -1,5) = 0,10$.

2) Calculer : $P(-0,5 \leq X < 6)$.

Exercice 13

Soit T une v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$. Calculer $E(T^r)$ pour r =1, 2, 3.

On considère les v.a. $X = 2T - 1$ $Y = |T|$ $Z = T^2$.

1) Calculer E(X) et V(X) ainsi que E(Z) et V(Z).

2) Déterminer la loi de chacune des variables X et Z.

3) Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y. Calculer E(Y).

Exercice 14

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

2) Soit X une variable admettant pour densité f, calculer E(X) et V(X).

3) Calculer la fonction de répartition F de X et montrer que $F(-x) = 1 - F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Préciser la valeur de F(0) et tracer le graphe de F.

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire dont la loi est définie par la densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^3} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(avec } a > 0\text{)}.$$

Scanné avec CamScanner

1) Déterminer k de sorte que la fonction f soit bien une densité de probabilité. Exprimer E(X) en fonction de a et montrer que V(X) n'est pas défini.
2) Calculer alors la fonction de répartition F de la variable X et déterminer la médiane de cette répartition en fonction de a.

Scanné avec CamScanner